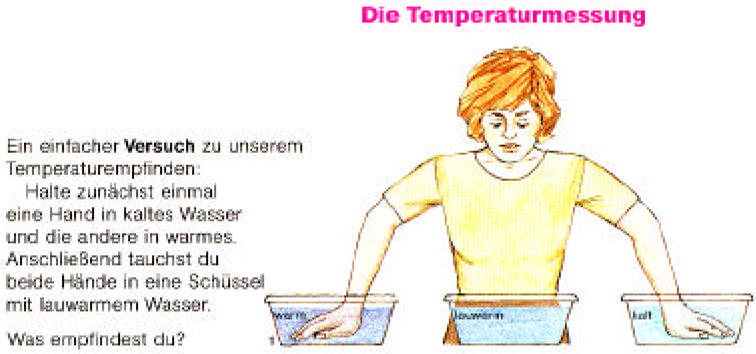
„Unsere Sinne logarithmieren“
zur Mathematik der Sinneswahrnehmung

Dieter Plappert

Staatliches Seminar für Schulpädagogik (Gymnasien) Freiburg

1. Einleitung

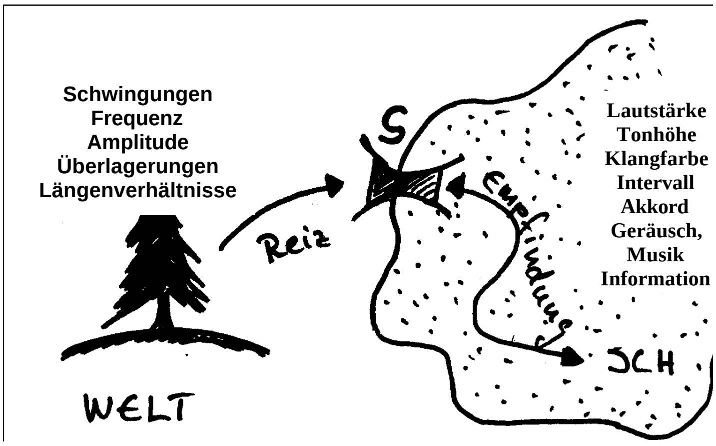


„Wenn jemand die linke Hand in heißes Wasser, die rechte in kaltes taucht und daraufhin beide in lauwarmes, so hat er nicht in beiden Händen dasselbe Wärmegefühl, d.h. für ein und dieselbe Temperatur haben wir manchmal zwei verschiedene Wärmeempfindungen. Unser Wärmesinn ist unzuverlässig, er lässt sich leicht täuschen. Deshalb benützen wir in der Physik Messgeräte die vom Sinneseindruck des Menschen unabhängig sind. Thermometer stellen den Wärmezustand eindeutig fest.“
So oder ähnlich beginnen viele Physikbücher der Sekundarstufe I das Kapitel Wärmelehre, vermutlich wird der oben beschriebene Versuch häufig als Einstieg im Unterricht eingesetzt. Die Botschaft dieses Versuches können wir folgendermaßen beschreiben: „Die Sinne des Menschen täuschen sich bzw. lassen sich täuschen; sie gaukeln uns eine nicht wirklich vorhandene sondern nur subjektiv empfundene Welt vor. Wir dürfen ihnen nicht trauen, sondern nur den mit rationalem Verstand entwickelten Messgeräten; nur auf diese Weise können wir die Welt objektiv erfahren.“ Durch diese Art der Betrachtungsweise wird unsere eigene Erfahrung abgewertet. Viel reizvoller und vermutlich viel zeitgemäßer wäre es, das oben beschriebene Phänomen ernst zu nehmen, es zu problematisieren. Dann würde deutlich werden, dass sich nicht ein „Sinn täuscht“, sondern vielmehr derjenige, der die zum Verständnis dieses Phänomens notwendigen Zusammenhänge nicht durchschaut. Die im folgenden beschriebenen Inhalte und Versuche sollen in erster Linie die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, ihre Sinne zu schulen, genauer wahrnehmen zu lernen. Sie sollen Vertrauen bekommen in das, was sie selber empfinden, sie sollen erleben, dass es im subjektiven Empfinden für manche Fragestellungen objektive Gesetzmäßigkeiten gibt. Dies scheint mir gerade in der heutigen Zeit, in der die Heranwachsenden immer weniger eigene primäre Erfahrungen machen können, besonders notwendig zu sein.

In dem heutigen Vortrag möchte ich mit Ihnen zunächst den Weg nachvollziehen, den Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887), dem Begründer der „Psychophysik“, vor über 150 Jahren gegangen ist, auf dem es ihm gelang, die von Ernst Heinrich Weber (1795 – 1878) experimentell gewonnenen Daten mathematisch zu beschreiben. Dabei soll erläutert werden, was die Aussage „unsere Sinne logarithmieren“ bedeutet. Hierbei und auch bei dem im zweiten Teil des Vortrages dargestellten „Klangröhrenprojekt“ soll deutlich werden, wie mathematisches Denken auf sinnvolle Fragestellungen angewandt werden kann. Beide Themen habe ich vor etwa zwei Jahren auf einer Fortbildungsreihe zum Praktikum im N-Profil vorgestellt. Sie sind dafür gedacht ab der 10. Klassenstufe unterrichtet zu werden.

2. Reiz und Empfindung

Das Grundproblem der eingangs beschriebenen Betrachtungsweise ist, dass hier *ein äußerer Reiz p* und *eine innere Empfindung E* nicht sauber unterschieden sondern gleichgesetzt werden: im Beispiel die Temperatur mit der Wärme-empfindung. Diese Un-schärfe ist nicht nur im Unterricht sondern auch in vielen Schulbüchern anzutreffen. So wird etwa beim Schall Frequenz mit Tonhöhe, Amplitude mit Lautstärke, und beim Licht Frequenz mit Farbe gleichgesetzt. In der dargestellten Skizze werden diese beiden Bereiche schematisch getrennt: die Welt der äußeren, physikalischen Reize und die innere Welt der Empfindungen. Diese Unterscheidung kann Anlass zu tiefgreifenden erkenntnistheoretischen und philosophischen Überlegungen sein. Darauf wollen wir an dieser Stelle verzichten und im Weiteren von dem Folgenden ausgehen:



Ein physikalischer Reize der Stärke p erregt ein Sinnesorgan. Das hat beim Beobachter eine Empfindung der „Stärke“ E zur Folge. Die Stärke des Reizes p können wir äußerlich mit einem physikalischen Messinstrument bestimmen, die „Stärke“ E der Empfindung kann nur der jeweilige Beobachter selbst innerlich beobachten. Wie diese beiden Größen, die physikalische Größe p und die psychische Größe E zusammenhängen, wird in der „Psychophysik“ untersucht. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Verfolgung der physikalischen Reize im Sinnesorgan selbst und in den daran anschließenden Bahnen, immer äußerlich bleibt und nichts wesentlich Neues zu der hier angesprochenen Fragestellung beiträgt. Hier werden zwei grundsätzlich verschiedenartige Größen miteinander in Beziehung gebracht, eine äußerlich messbare physikalische Größe p und eine nur durch innerliches Erleben bestimmbare psychische Größe E. Diese hat ohne einen empfindenden Menschen keinen Sinn. Es gibt verständlicherweise viele Zweifel, ob diese Fragestellung überhaupt sinnvoll ist. Die reproduzierbaren Ergebnisse, die durch diese Art der Fragestellung gefunden wurden, rechtfertigen jedoch nachträglich dieses Vorgehen.

3. Die Konstruktion der Empfindungsgröße E

Eine der entscheidenden Fragen ist, ob der Empfindung eines Menschen überhaupt sinnvoll Zahlenwerte zugeordnet werden können? Damit dies möglich wird, muss eine Empfindungsskala konstruiert werden. Das kann auf unterschiedliche Weise geschehen. Fechner war der erste, dem dies 1850 sinnvoll gelang:

Gleichheit:

Zwei gleiche Empfindungen E_1 und E_2 werden durch zwei Reize p_1 und p_2 verursacht. Dann muss gelten:. $E(p_1) = E(p_2) \Leftrightarrow p_1 = p_2$, beide Reize haben dieselbe Stärke. Für diese Betrachtungen wird also eine eineindeutige Zuordnung der Reiz- und der Empfindungsgröße vorausgesetzt. Dies gilt, wie wir an dem einführenden Beispiel gesehen haben, nicht immer.

Nullpunkt:

Der Nullpunkt der Empfindungsskala ergibt sich ganz natürlich: alle Reize $p = p_0$, die unterhalb der Reizschwelle p_0 liegen, haben die Empfindung $E = 0$ zur Folge.

Einheit:

Zwei Reize p_1 und p_2,, die dieselbe Empfindung der Stärke E_1 auslösen, seien vorgegeben. Nun wird die Stärke des Reizes p_2 so lange vergrößert, bis der Beobachter die Empfindung, die die beiden Reize bei ihm auslösen, das erste Mal gerade unterscheiden kann, d.h. bis $E_1 \neq E_2$ erstmals erlebt wird. Die Differenz der beiden Reize $\Delta p = p_2 - p_1$, die gerade einen wahrnehmbaren Unterschied in der Empfindungsstärke E auslöst, wird „Unterschiedsschwelle" genannt und zur Definition der Einheit der Empfindungsskala verwendet. E_2 hat dann den Wert $E_2 = E_1 + 1$, wenn p_1 um Δp vergrößert wird. Die Skala wird auf diese Weise stufenweise konstruiert. Der Zahlenbereich dieser Skala ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen.

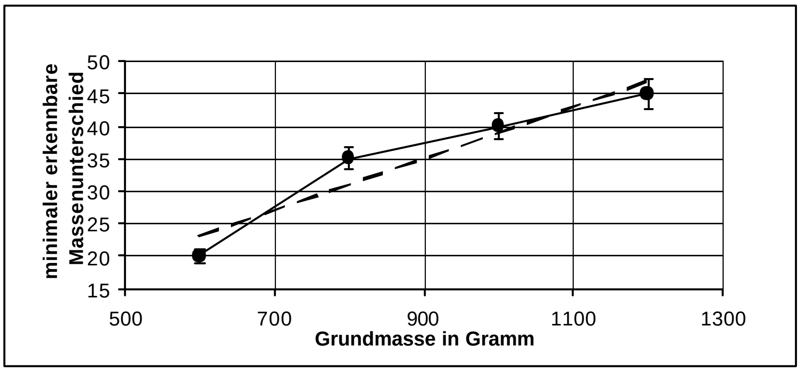
4. Der Zusammenhang der Reizgröße p und der Empfindungsgröße E

Wie hängen nun die Reizgröße p und die Empfindungsgröße E zusammen. Da wir einen eineindeutigen Zusammenhang vorausgesetzt haben, fragen wir also nach der Reiz-Empfindungs-Funktion p(E), bzw. deren Umkehrfunktion E(p). Die Zahlenwerte der Reizgröße p sind Teilmenge der rationalen, bzw. der reellen Zahlen, die Zahlenwerte der Empfindungsgröße E sind Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dieser Zusammenhang wurde von Weber experimentell untersucht. Dabei entdeckte er 1834 eine erstaunliche Gesetzmäßigkeit. Er untersuchte die Fragestellung: Ist die „Unterschiedsschwelle Δp", die die Zunahme der Empfindungsstärke um eine Einheit verursacht, immer gleich oder hängt sie von der Stärke der Empfindung E bzw. der Größe des Reizes p ab. In dem nun folgenden Praktikumversuch gelang es Schülern eines Physikkurses der 12. Klasse für uns alle sehr unerwartet, recht genau auf dasselbe Ergebnis wie Weber zu kommen.

5. Der Zusammenhang der Masse m und der Schwereempfindung S

Im Anhang ist das Aufgabenblatt zu finden, das den Schülern ausgeteilt wurde.
Bei unterschiedlichen Ausgangsmassen m_0 sollen experimentell die zugehörige Unterschiedsschwellen Δm ermittelt werden. Die Ergebnisse einer Gruppe sind im Folgenden dargestellt:

m_0	600	800	1000	1200
Δm	20	35	40	45
relative Masse $\frac{\Delta m}{m_0} \cdot 100$ in %	3,3	4,4	4,0	3,8



Je größer die Masse zweier Gegenstände ist, desto großer muss ihr Masseunterschied Δm sein, damit sie als verschieden schwer empfunden werden. Das kennt jeder: ob sich in einem Koffer eine

Schraubenmutter befindet oder nicht, ist durch unsere Schwereempfindung nicht herauszubekommen, ob sie aber auf der Rückseite einer Postkarte aufgeklebt ist oder nicht, ist sehr einfach zu ermitteln. Durch unsere Versuche haben wir wie Weber ein bemerkenswertes Ergebnis festgestellt:

die relative Masse $\frac{\Delta m}{m_0} = k$ ist konstant.

Eine Schülergruppe fasst die Ergebnisse des Kurses folgendermaßen zusammen:

„Vergleicht man die Ergebnisse mit den Untersuchungen von E. H. Weber aus dem Jahre 1834, so ähneln sich die Ergebnisse doch sehr, obwohl Weber sicherlich mehr Messungen durchführen konnte. Weber stellte seinerzeit fest , dass der Quotient Dm/ m_0 eine Konstante ist. Weber kam auf den Faktor von etwa 3%, wir auf einen Mittelwert von 3,9%.

Obwohl es sich hierbei um ein psychophysikalisches Experiment handelt, bei dem wir den Zusammenhang zwischen einer physikalischen Größe und einer psychischen Empfindung untersuchen, sind die Ergebnisse der einzelnen Gruppen doch erstaunlich gleich.

Und dies, obwohl viele Faktoren die Untersuchung erschweren, die Tagesform der Versuchsperson, die abbauende Konzentration mancher Testpersonen im Laufe der Versuchsreihe, sowie der aus Zeitgründen nur sehr kleine untersuchte Messbereich.“

Aus den Messungen unseres Kurses können wir folgende Schlüsse ziehen:

- je größer die Grundmasse m_0 wird, desto größer muss der Masseunterschied Δm sein, damit er von unserem Schweresinn sicher festgestellt werden kann
- wenn wir unsere Messergebnisse linear annähern („Weberscher Ansatz“), dann liegt der von uns ermittelte Wert erstaunlich nahe dem von Weber ermitteltem Wert.

6. Die Weber-Konstante

Weber untersuchte auf entsprechende Weise die verschiedenen Sinne. Immer wieder stellte er fest, dass die relative Reizzunahme $\frac{\Delta p}{p} = k$ konstant ist. Die Konstante k wird heute „Weber-Konstante“ genannt.

Im Anhang sind zwei Anleitungen zu finden, wie die Weberkonstante für die Lautstärke und Helligkeit im Praktikumversuch ermittelt werden können.

Table 2-7 Typical Weber Fractions (ΔI/I) (Based on Teghtsoonian, 1971)

CONTINUUM	WEBER FRACTION
Brightness	0.079
Loudness	0.048
Finger span	0.022
Heaviness	0.020
Line length	0.029
Taste (salt)	0.083
Electric shock	0.013
Vibration (fingertip)	
60 Hz	0.036
125 Hz	0.046
250 Hz	0.046

7. Das weber-fechnersche Gesetz

Das Ergebnis von Weber beschreibt eine fundamentale Gesetzmäßigkeit, wie der Menschen die Welt erlebt. Diese drückt Fechner durch den folgenden Satz anschaulich aus:

„Ein Thaler hat viel weniger Wert für den Reichen als für den Armen, und wenn er einen Bettler einen Tag lang glücklich macht, so wird er als Zuwachs zum Vermögen eines Millionärs gar nicht merklich von diesem gespürt.“

Die Empfindung des „Reichseins“ wächst also nicht gleichmäßig mit der Geldmenge, die man besitzt.

Als Ausgangspunkt für seine mathematischen Überlegungen, nimmt Fechner das von Weber experimentell gefundene Gesetz:

(1) $$\frac{\Delta p}{p} = k .$$

Schreiben wir diese Gleichung ausführlicher, so erhalten wir

(2) $$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p(E_n) - p(E_{n-1})}{p(E_{n-1})} = k\,.$$

Lösen wir diese nach $p(E_n)$ auf, so ergibt sich

(3) $$p(E_n) = p(E_{n-1}) + k \cdot p(E_{n-1}) = p(E_{n-1}) \cdot (1+k),$$

eine Rekursionsformel für exponentielles Wachstum:

$$p(E_1) = p(E_0) \cdot (1+k)$$

$$p(E_2) = p(E_1) \cdot (1+k) = p(E_0) \cdot (1+k)^2$$

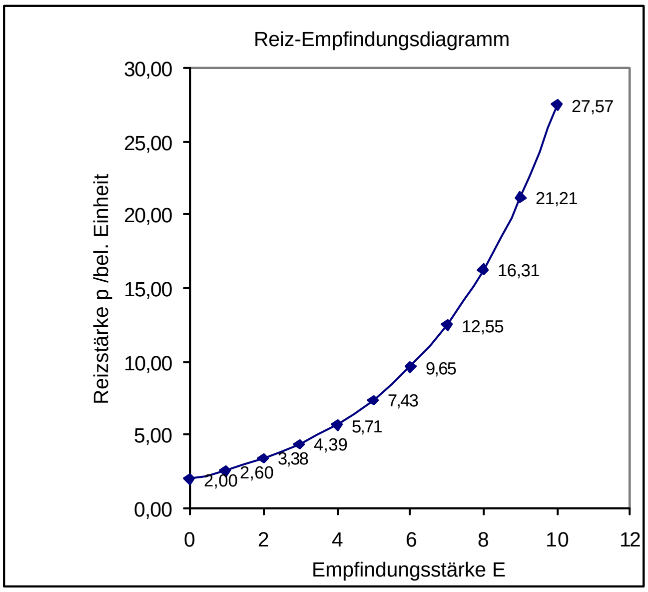
....

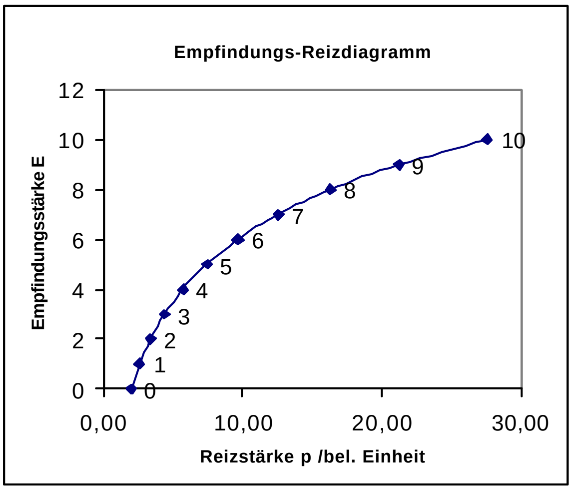
(4) $$p(E_n) = p(E_0) \cdot (1+k)^n\,.$$

n sind hierbei die Werte, die die Empfindungsgröße E annehmen kann. Ersetzen wir n durch E, so erhalten wir als Reiz-Empfindungs-Funktion:

(5) $$p(E) = p(0) \cdot (1 + k)^E\,,$$

wobei p(0) die Reizstärke eines gewählten Nullpunkt der Empfindungsstärke, z.B. die absolute Reizschwelle ist.
Für willkürlich gewählte Werte für p_0 und k dargestellt erhalten wir das nebenstehende Diagramm. Es wird deutlich, wie stark der äußere Reiz p mit zunehmender Empfindungsstärke zunimmt. Das hat zur Folge, dass bei starken Empfindungen, der äußere Reiz sehr stark vergrößert werden muss, um überhaupt eine weitere Zunahme der Empfindung zu bewirken; soll beispielsweise die Helligkeit in einem Zimmer vergrößert werden, kann bei dämmriger Beleuchtung eine Kerze eine große Wirkung haben; bei gleißend heller Beleuchtung wird der Beleuchtungsanteil einer Kerze dagegen überhaupt nicht bemerkt.





In unserem täglichen Leben spielt statt des oben dargestellten Reiz-Empfindungs-Zusammenhanges oft die Frage eine Rolle, wie groß die Empfindungsstärke E bei einer gegebenen Reizstärke p ist. Die hierfür benötigte E(p)–Funktion ist die Umkehrfunktion der oben beschriebenen Funktion.
Um (5) nach der Hochzahl E aufzulösen, erhalten wir zunächst:

(6) $$\frac{p(E)}{p(0)} = (1+k)^E\,.$$

Logarithmieren wir mit dem dekadischen Logarithmus, so ergibt sich

(7) $$\log\frac{p(E)}{p(0)} = E\cdot\log(1+k)\,.$$

Lösen wir nach E auf, so ergibt sich

(8) $$E(p) = \frac{1}{\log(1+k)}\log\frac{p}{p(0)},$$

Das Schaubild dieser Funktion ist im nebenstehenden Diagramm dargestellt. Der Verlauf des Schaubildes macht deutlich, dass bei kleinen Reizstärke die Sinnesorgane sehr empfindlich sind: eine kleine Zunahme der Reizstärke p hat, wie das steile Schaubild veranschaulicht, eine starke Zunahme der Empfindung E zur Folge. Bei großen Reizstärken p ist das genau umgekehrt: das Sinnesorgan ist sehr unempfindlich, denn um eine Verstärkung der Empfindung zu erreichen, muss, wie das flache Schaublid zeigt, der Reiz erheblich verstärkt werden. Auf diese Weise werden die Sinnesorgane in gewissen Grenzen gegen Überbelastung geschützt.

Deutlich wird auch, dass deshalb unsere Sinnesorgane einen sehr großen Intensitätsbereich des Reizes wahrnehmen können. Bei Schall beträgt dieser Bereich

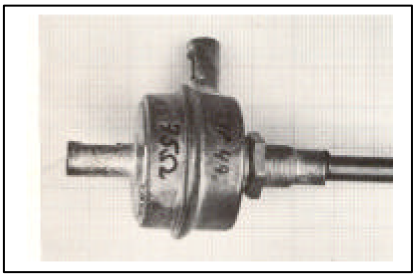
$$10^{12}. = 1\,000\,000\,000\,000.$$

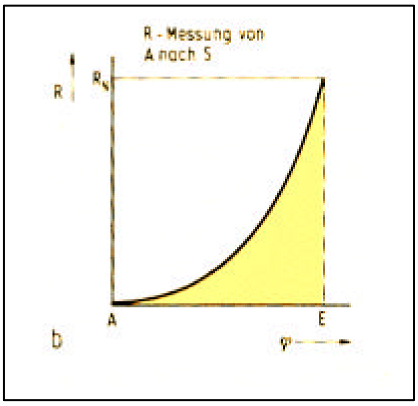
Ersetzen wir die Konstante $\frac{1}{\log(1+k)}$ durch c, so bekommt die Gleichung (8) die folgende Form:

(9) $$E(p) = c\cdot\log\frac{p(E)}{p(0)}\,.$$

Diese Gleichung beschreibt unser heutiges Thema: „unsere Sinne logarithmieren“: Ein Reiz p, der 100 000 = 10^5 mal größer ist als die Reizschwelle p(0), ergibt eine Empfindung E, für die gilt

$E = c\cdot\log\frac{10^5\cdot p(0)}{p(0)} = 5\cdot c$, also eine 5 mal stärkere Empfindung. Wir empfinden also nicht den Reiz selbst, sondern den Logarithmus des Verhältnisses der Reizgröße zu einem Schwellenwert, beziehungsweise die Hochzahl dieses Verhältnisses.





Der logarithmischen Zusammenhang von äußerem Reiz p und innerer Empfindung E wird in der Technik an unterschiedlichen Stellen berücksichtigt, z.B. bei dem Knopf, an dem die Lautstärke eines Radios verändert werden kann. Der Drehknopf ist oft die eine Seite eines Potentiometers, eines regelbaren Widerstandes. Wäre der Zusammenhang von Widerstand und Drehwinkel proportional, so könnten kleine Lautstärken nur sehr schwer eingestellt werden, das schon kleine Veränderungen des Drehwinkels φ große Wirkungen haben. Bei großen Lautstärken wäre es gerade umgekehrt. auch starke Drehungen hätten zwar starke Änderungen des Widerstandes jedoch nur kleine Zunahmen der Lautstärke zur Folge.

Zwei weitere Beispiele für die Allgemeingültigkeit des weber-fechnerschen Gesetzes seien hier noch genannt:

Helligkeit:

Schon der Griechische Astronom Hipparch (190 – 120 v.Chr.) teilte die Helligkeit der Sterne in sechs Größenklassen ein. Messungen ergeben, dass sich die Lichtintensität gemessen in W/m^2 von Größenklasse zu Größenklassen um den Faktor 2,5 ändert.

Tonhöhe

Wählen wir als natürliches Einheitsmaß die die Oktave, so wissen wir, dass die Frequenz um den Faktor 2 verändert werden muss, um von Oktave zu Oktave zu gelangen.

8. Bel und Dezibel:

Da nach dem weber-fechnerschen Gesetz die Empfindung gleichmäßig mit dem Logarithmus des Reizverhältnisses wächst, wurde für den Gebrauch in der Praxis für dieses logarithmische Verhältnis die „Maßeinheit“ Bel (B) eingeführt. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass mit dem gleichmäßigen Zunehmen der Bel-Zahl die Empfindung auch gleichmäßig zunimmt. Bel wird auf die folgende Weise festgelegt:
Hat der Logarithmus des Reizverhältnisses den Wert 1 B, so ist wegen

$\log\frac{p_1}{p_0} = 1$; p_1 10 mal größer als p_0.

Hat der Logarithmus des Reizverhältnisses den Wert 2 B, so ist wegen

$\log\frac{p_1}{p_0} = 2$; p_1 100 mal größer als p_0.

Allgemein gilt:
Hat der Logarithmus des Reizverhältnisses den Wert n B, so ist wegen

$\log\frac{p_1}{p_0} = n$; p_1 10^n mal größer als p_0.

Da für die Untersuchung von Empfindungsstärken Bel eine sehr große Maßeinheit ist, wird statt Bel meist Dezibel (dB) angegeben.
Auf diese Weise bekommt die durch die vom weber-fechnerschen Gesetz abgeleitete Empfindungsgröße $E(p) = c \cdot \log\frac{p(E)}{p(0)}$ eine „Maßeinheit“.

Die Lautstärke wird in der Physik üblicherweise durch die folgende Gleichung festgelegt:

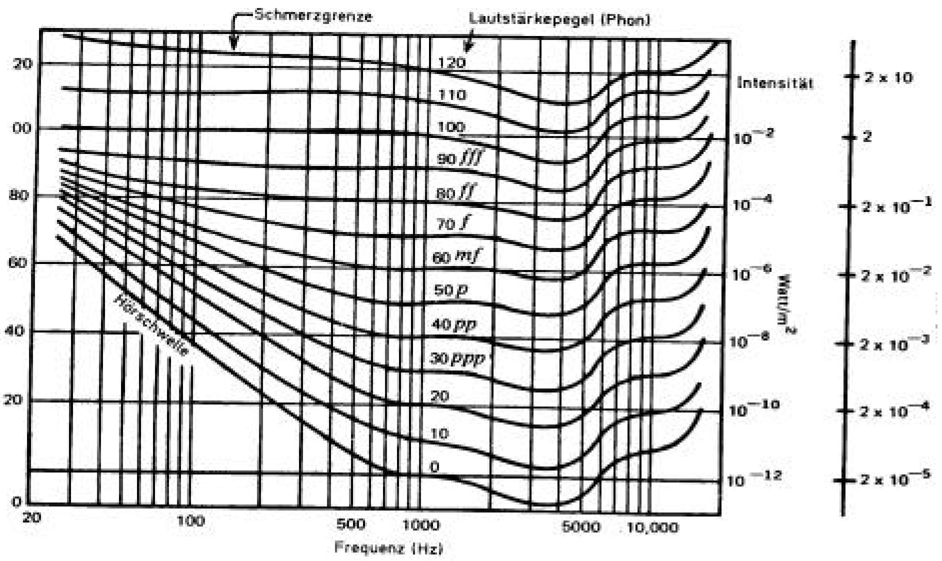
$$L(I) = 10 \cdot \log\frac{I}{I(0)}\ \text{dB}, \qquad (10)$$

wobei I(0) die Intensität des gewählten Nullpunktes, z.B. der Hörgrenze ist.
Dass die Lautstärke nicht gleichmäßig mit dem äußeren Reiz steigt, ist uns oft nicht bewusst. Natürlich ist klar, dass ein großes Orchester, das aus einer Vielzahl von Musikern besteht, nicht entsprechend so laut ist. Als Demonstrationsexperiment im Unterricht, lässt sich das nicht ganz so einfach zeigen. In Büchern findet man zwar Hinweise wie, wie das möglich sein könnte.

Baut man diesen „zentralen Versuch“ aber auf, so stellt man fest, dass die Tonhöhe der Glocken so verschieden sind, dass so die Lautstärke nicht sinnvoll abgeschätzt werden kann. Ein wenig besser ist das abgebildete Summer-Experiment. Deutlich wird hier, dass zwei bzw. drei Summer zusammen, obwohl sie die doppelte bzw. dreifache Energie aussenden, nur unwesentlich lauter sind als ein Summer allein.

9. Der Zusammenhang von Dezibel und Phon

Töne derselben Intensität I werden jedoch bei unterschiedlicher Frequenz verschieden laut empfunden. Im untenstehenden Diagramm sind die Intensitätswerte der Töne, die gleichlaut gehört werden, durch „Kurven gleicher Lautstärke“ (Isophone) miteinander verbunden. Diese psychophysikalische Eigenschaft wird in einer weiteren Messgröße, der „Lautheit L_N“ berücksichtigt. Die Maßeinheit dieser Größe ist 1 Phon. Alle Töne einer Isophonen haben dieselbe Lautheit. Für Töne mit 1000 Hz entspricht die Intensität I des Tones, üblicherweise in dB angegeben, der in Phon angegebenen Lautheit.
Bei den in der Schallmesstechnik verwendeten Geräten zur Lärmmessung, ist meist auch die dB(A)-Messung möglich, bei der die physikalischen Messwerte durch einen



an der Phonskala orientierten Faktor bewertet werden, so dass diese Skala die Lautstärkeempfindung des Menschen bis zu einem gewissen Maß berücksichtigt.
In diesem Zusammenhang ist jedoch zu beachten, dass das Phänomen „Lärm“ wesentlich komplexer ist, als die von uns hier sehr vereinfacht dargestellten Zusammenhänge. Es spielt hier nicht nur die „Lautheit“ eines empfundenen Reizes sondern auch seine emotionale Auswirkung für den Einzelnen eine entscheidende Rolle. Dies soll aber an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden.
Nun möchte ich zum Schluss das Klangröhrenprojekt skizzieren.

10. Das „Klangröhrenprojekt“ – Aufgabenstellung

„Längen Sie ein Alurohr so ab, dass ein von Ihnen vorher festgelegter Ton zum Erklingen kommt!“

Um das Ziel dieses Projektes zu erreichen, müssen verschiedene Fragestellungen und Teilaufgaben gelöst werden.

- Erstellen Sie eine Liste der Arbeitsschritte, die Sie dabei bearbeiten müssen.
- Planen und beschreiben Sie, wie Sie die jeweiligen Schritte durchführen wollen.
- Erstellen Sie eine Liste mit Informationen, die Sie benötigen.

- Geben Sie an, wie Sie sich die Informationen beschaffen wollen.
- Erstellen Sie eine Liste der Experimente, die Sie durchführen wollen.
- Ermitteln Sie auch, welche Hilfsmittel Sie dazu benötigen.

11. Tagebuchmethode:

Jedes Team führt während der Bearbeitung des Projekts eine Art Tagebuch, in dem nicht nur alle wesentlichen Schritte und Ergebnisse festgehalten werden sollen, sondern in dem auch auf Fragen der folgenden Art eingegangen werden soll:

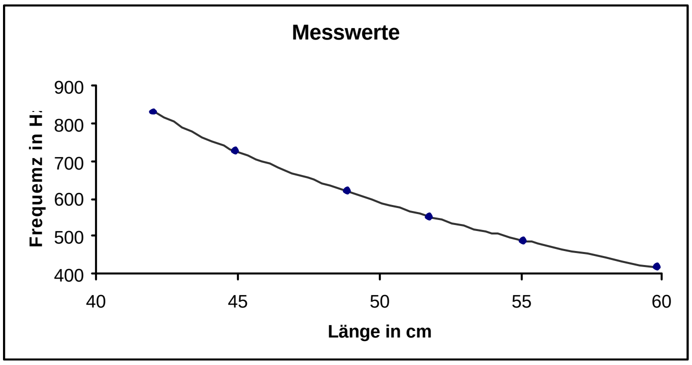
- Welche Vorstellungen zum Thema gingen mir durch den Kopf?
- Wo ist mir das Thema bereits schon einmal begegnet?
- Welche Fragen haben sich mir zum Thema gestellt?
- Wie habe ich versucht, die Fragen zu beantworten?
- Welche Schwierigkeiten ergaben sich dabei?
- Wie bin ich mit diesen Schwierigkeiten umgegangen?
- Woran wurde ich während der Arbeit erinnert?
- Was habe ich dabei gelernt?
- Welche Fragen blieben offen, die ich in der nächsten Stunde in Angriff nehmen muss?

Jedes Team führt ein gemeinsames Tagebuch; jeder Mitarbeiter des Teams fertigt einzelne Teile des Tagebuchs selbständig an, kennzeichnet sie mit seinem Namen. Die Verantwortung für das entstandene Tagebuch trägt das **Team gemeinsam**, d.h. für die Qualität der Inhalte, des Layouts, ...
Das Tagebuch muss spätestens am 21. Dezember 1999 abgegeben werden.
Es soll soweit ausgearbeitet sein, dass es von der äußeren Form her als wissenschaftlicher Artikel in einer Zeitschrift veröffentlicht werden könnte.

12. Einige Zwischenstufen

- Der Bau eines Monocords
- Untersuchungen mit einem Monocord: Zunächst sollen nach der pythagoreischen Methode am Monocord die besonderen Tonintervalle gefunden und bestimmt werden. Danach soll der Zusammenhang der Intervalle und der Saitenlänge ermittelt werden.
- Der Bau eines Frequenzmessers
- Der Zusammenhang von Tonintervall und Frequenz

13. Der Zusammenhang von Frequenz und Länge einer Klangröhre



Zunächst soll die Frequenzen f von einiger Klangröhren verschiedener Länge l durch Messung ermittelt werden (z.B. Röhren des Windklangsspiels von Opitec). Danach soll mit Hilfe der Messwerte ein mathematischer Zusammenhang zwischen f und l gesucht werden.
Obwohl die Schülerinnen und Schüler des Mathematik-Leistungskurses ähnliche Aufga-

benstellungen im Mathematikunterricht bearbeitet hatten, scheiterten sie hier fast vollständig, selbst bei der Wahl eines möglichen Funktionstyps.
Nachdem wir uns für eine Funktion des Typs $f(l) = a \cdot l^{-k}$ entschieden hatten, mussten die Koeffizienten a und k bestimmt werden.
Das Ergebnis einer Gruppe lautete:

$$f(l) = 1472046{,}605 \cdot l^{-1{,}999111242} .$$

Es entstand natürlich die Frage der sinnvcollen Rundung aber auch die Frage, ob es in der Natur immer schöne ganze Hochzahlen sein müssen. Auch ich selbst fühlte eine gewisse Unsicherheit und erst, als ich nach langer Suche die theoretische Herleitung des Frequenz-Längen-Zusammenhangs für Klangröhren kennenlernte, in der sich –2 als Exponent ergab,spürte ich eine gewisse Zufriedenheit. Dies wurde für uns ein Beispiel dafür, dass diese Art der Frage nicht empirisch gelöst werden kann.
Auszug aus dem Tagebuch einer Gruppe:
„Wir stellten nun eine Tabelle auf, aus der nicht nur die Rohrlänge und deren gemessene Frequenzen, sondern auch deren berechnete Frequenzen und die daraus resultierenden Abweichungen in Prozent ersichtlich waren. Die Ergebnisse ließen uns nicht besorgt wirken.

l in cm	42	44,9	48,9	51,8	55,1	59,8
f gemessen in Hz	830	726	618	551	488	415
f berechnet in Hz	837	733	618	551	487	413
Abweichung in %	0,8	1,0	0	0	0,2	0,5

14. Das Herstellen einer Klangröhre nach vorbestimmtem Ton

Wir kommen nun zum Höhepunkt des Projekt: Nachdem die Frequenz-Längen-Funktion bestimmt ist, soll eine Klangröhre hergestellt werden, die einen selbstgewählten Ton bzw. ein Klangspiel, das einen selbstgewählten Klang zum Erklingen bringt.
Hier ein Auszug aus dem Tagebuch einer Gruppe:
„Es war nun soweit. das Unternehmen ”Klangröhrenprojekt” fand hier seinen Ausklang. Der Tag X war gekommen und wir wussten, es würde ein entscheidender Moment, bei dem entweder der Moment über uns, oder wir über den Moment entschieden. Wahre Größe stellt sich dem Risiko. Wir fühlten uns der Herausforderung gewachsen.
”Sägen sie ein Rohr so zurecht, dass ein zuvor vorgegebener Ton erreicht wird, ohne große Abweichungen!”
Lachhaft, was konnte denn jetzt noch schief gehen. Schnell waren Töne gefunden. A und H. Da wir schon Stimmgabeln auf ihre Frequenz gemessen hatten, wussten wir, dass wir sowohl 440 Hz als auch 494 Hz erreichen mussten. Die dafür notwendigen Längen ergaben sich aus unserer Formel: A = 57,9 cm und H = 54,7 cm.
Wir sägten uns zunächst auf ein A ein. Aber als wir dann das Rohr anschlugen, wussten wir, was wir beim nächsten Ton richtig machen mussten: ein wenig Spielraum lassen und später mit einem Schmirgelpapier die Feinheiten herauszaubern. Dies gelang uns dann auch. Unser zurecht gesägtes Rohr hatte exakt die Frequenz 494 Hz.
Wir waren stolz.“

15. Schlusswort

Als Schlusswort möchte ich noch einmal aus dem Tagebuch zitieren:
„Abschließend bleibt noch zu sagen, dass dieses Projekt eine willkommene Abwechslung zum grauen Alltag der Schule bot und uns auch, wie man an diesem Bericht sicherlich sieht, jede Menge Spaß gemacht hat. Außerdem eigneten wir uns neue Erkenntnisse aus dem physikalischen und musikalischen Bereich sowie in der Allgemeinbildung an. Vom handwerklichen Geschick wollen wir erst überhaupt nicht reden.“

16. Nachtrag 1

Logarithmieren unsere Sinne wirklich?

•Pythagoreisches Komma:

12 Quinteinheiten ergeben nicht exakt 7 Oktaveinheiten.

•Stanley S. Stevens (1906 – 1973) findet experimentell:

20 Unterschiedsschwellen erscheinen nicht doppelt so intensiv wie 10

Stevens Ansatz: $E(p) = k \cdot (p -, p(0))^n$

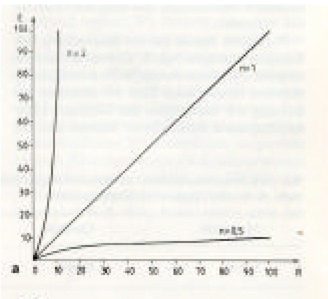
wobei p(0) ein beliebig festgelegter Referenzwert ist.

Untersuchungsmethode:

Direktes Abschätzen des Verhältnisses der Empfindung E(p) zur „Referenzempfindung“ E(0).

Stevens Potenzgesetz

$$E(p) = k \cdot (p - p(0))^n$$



	n
Helligkeit (weisses Licht)	0,21
Lautstärke (1000 Hz)	0,35
Lautstärke (Rauschen)	0,41
Vibration	0,56
Kaltempfindung	0,60
Druckempfindung	0,67
Kraft (Gewichtheben)	0,79
Warmempfindung	0,96
Schmerz (Wechselstrom)	2,13

„8 Geigen sind doppelt so laut wie 1 Geige!?“

Nachtrag 2

äußerer Reiz p und innere Empfindung E sind zwei unterschiedliche Größen

Geräuschmessung der Reifen mittels Kunstkopfmikrofon ...

... und subjektive Beurteilung der Außengeräuschaufnahme.

Test 3/2003

Test 3/2003

Anhang:

1. Beispiele von Tagebüchern zum Klangröhrenprojekt

Das Tagebuch zweier Schülergruppen zum Klangröhrenprojekt ist der Veröffentlichung dieses Skripts im Internet beigefügt (www.plappert-freiburg.de/physik).

2. Zur Physik von Klangröhren

Nachdem ich Literatur* zur Physik von Klangröhren finden konnte, ergibt sich der folgende Sachverhalt:

Bei Klangröhren (Glockenröhren, engl. chimes) entstehen Eigenschwingungen von Transversalwellen. Die Frequenzen der entstehenden verschiedenen Eigenschwingungen erhält man als Lösung einer Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$f_n = \frac{p \cdot K \cdot c}{8l^2} \cdot \left[3{,}011^2, 5^2, 7^2, \ldots, (2n+1)^2\right],$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit und K ein „Geometriefaktor“ ist.

Für Röhren kann K berechnet werden durch:

$$K = \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{2},$$

wobei r der Außen- und s der Innenradius der Röhre ist.

Aufgrund unserer Messungen ergibt sich für Aluminiumröhren mit Durchmesser 25 mm und einer Wandstärke von 1 mm (Opitec) für die erste hörbare Eigenschwingung die Gleichung:

$f(l) = 148{,}01 \cdot l^{-2}$, mit l in m angegeben.

Errechnen wir aus dem Wert des Parameters die Schallgeschwindigkeit, so erhalten wir 4895 m/s. Ein typischer Literaturwert für Aluminium ist dagegen 5100 m/s.
Diese Abweichung können wir bisher nicht verstehen.

Wenden wir den experimentell gefundenen Zusammenhang an, so erhalten wir die folgenden beiden Beziehungen:

$$f(l) = 148{,}01 \cdot l^{-2} \qquad \text{und} \qquad l(f) = 12{,}166 \cdot f^{-0{,}5}.$$

3. Berechnung der Länge einer Klangröhre für eine gewünschte Frequenz:

Die Frequenz eines bekannten Tones muss mit dem Faktor $\sqrt[12]{2}$ multipliziert werden, um die Frequenz des Tones zu erhalten, der einen Halbtonschritt höher ist.

<u>Beispiel:</u> Berechne die Frequenz des Tons c, wenn der Ton a die Frequenz 440 Hz hat!

Der Ton c liegt 3 Halbtonschritte höher als a; somit gilt:

$$f_c = \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot 440\ \text{Hz} = (\sqrt[12]{2})^3 \cdot 440\text{Hz} = 523{,}3\ \text{Hz}.$$

Setzte nun die gewünschte Frequenz in die Gleichung $l(f) = 12{,}166 \cdot f^{-0{,}5}$ ein, so erhältst du die Länge der Röhre, die diesen Ton ergibt, hier $l = 0{,}532$ m.

4. Literatur:

Zur Tagebuchmethode:
Getrost, Gabriele/ Würker, Achim: Mathematik erzählen; MNU 52/3 (15.4.99) S.146-151
Zur Sinnesphysiologie:
Campenhausen von, Christoph: Die Sinne des Menschen; Thieme Verlag Stuttgart
Schmidt, R.F.: Grundriss der Sinnesphysiologie; Springer-Verlag Berlin
Schmidt, R.F./Thews,G.: Physiologie des Menschen; Springer-Verlag Berlin
Hajos, Anton: Wahrnehmungspsychologie; Kohlhammer-Verlag Stuttgart
Zur Mathematik
Baumann, R: Analysis 1 Arbeitsbuch mit Derive; Klett1998
Lambacher Schweizer Mathematik Gymnasien Bad-Württ. Kl.10: S.31: Musik und Mathematik; Klett
Jörg Meyer: Was sind eigentlich Dezibel?; Mathematik Lehren Heft 113
Zur Physik der Musikinstrumente:
Neville H. Fletcher / Thomas D. Rossing: The Physics of Musical Instruments, 1991, Springer-Verlag
Herzlichen Dank für den Hinweis von Herrn Prof. Friedrich Gönnenwein, Universität Tübingen.

5. Bezugsquellen:

Stahlsaiten, Stimmschlüssel und Zitterwirbel sind in jedem Musikgeschäft erhältlich oder auch bei

Opitec Hohlweg 1 97232 Giebelstadt-Sulzdorf.

Dort sind auch die Aluminiumröhren, Windklangspiele, Sägen, ... erhältlich.

Physik **Sinnepraktikum**

1

Der Zusammenhang der Schwereempfindung und Masse

Ziele:
Durch das Vergleichen der Schwereempfindung von Körpern verschiedener Masse soll der Zusammenhang von Masse und Schwereempfindung untersucht werden.

Material:
6 Milchflaschen
Tuch zum Verbinden der Augen
Schraubenmuttern M 10
6 selbstklebende Aufkleber
Präzisionswaage

Vorbereitungen:
- Kennzeichne die Flaschen durch verschiedene Nummern zwischen 1 und 6 mit Hilfe der Aufkleber.
- Fülle alle Flaschen so mit Wasser, dass sie alle eine Masse von 500g (=Grundmasse m_o) haben.
- Ermittle die Masse einer Schraubenmutter.
- Erhöhe mit Hilfe Schraubenmuttern die Masse der Flaschen Nr.3 bis Nr.6 so, dass die Masse von Nr.3 etwa 10 g, die von Nr. 4 etwa 15 g, die von Nr.5 etwa 20 g und die von Nr. 6 etwa 25 g größer ist.

Durchführung:
Serie 1:
- Verbinde die Augen der Versuchsperson.
- Der Versuchsleiter gibt nun der Versuchsperson immer eine der Flasche der Grundmasse, also Nr.1 oder Nr.2 in die eine Hand und eine der übrigen in die andere Hand; die Versuchsperson kann also auch zwei Flaschen der Grundmasse erhalten. Der Versuchsleiter stellt dann die folgende Frage: „Ist eine Flasche schwerer, wenn ja welche oder sind beide Flaschen gleich schwer?“ Der Versuchsleiter notiert die Nummern der von der Versuchsperson gehaltenen Flaschen und ihre Antwort. Die Versuchsperson kann zum besseren Wahrnehmen vor der Antwort die Flaschen abstellen und wiederaufnehmen, auch mit verschiedenen Händen.
- Es werden mindestens 10 Stichproben durchgeführt. Der Versuchsleiter soll die Kombination der Flaschen so wählen, dass die Massendifferenz Δm, die von der Versuchsperson sicher unterschieden werden kann, deutlich wird. Sollte sich herausstellen, dass die vorgegebenen Masseunterschiede der Flaschen ungeschickt gewählt sind, müssen sie entsprechend neu gewählt und die 1. Versuchsserie von neuem durchgeführt werden.

Serie 2 - 4:
- Erhöhe nun schrittweise die Grundmasse aller Flaschen auf 750g, 1000g und 1250 g und führe den oben beschriebenen Versuch in drei neuen Serien durch. Die Massendifferenz der Flaschen Nr. 3 bis Nr. 6 muss neu gewählt werden. Bitte prüfe durch entsprechende Vorversuche, ob deine Wahl geschickt erfolgt ist.
- Führe die Versuche entsprechend der Beschreibung der 1. Serie durch.

Wiederholung mit vertauschten Rollen:
- Tausche die Rollen, der Versuchsleiter wird Versuchsperson und umgekehrt; wiederhole den Versuch um mehr Messwerte zu erhalten.

  Achtung: Tauschen Sie erst die Rollen, wenn eine Versuchsperson alle vier Serien durchgeführt hat.

Auswertung:
- Bestimme für jede Versuchsperson getrennt bei den einzelnen Grundmassen m_0 die sicher wahrgenommene Massendifferenz Δm.
- Stelle fest, ob du eine Gesetzmäßigkeit findest, wie m_0 und Δm zusammenhängen: stelle diesen Zusammenhang gegebenenfalls graphisch dar und erläutere ihn.

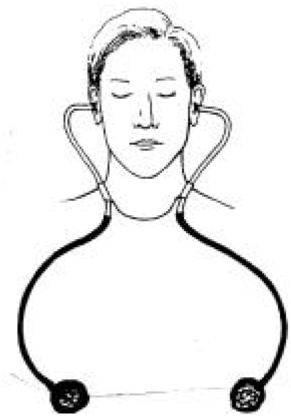
Physik **Sinnepraktikum**
2

Der Zusammenhang von Lautstärke und Schallintensität

Ziele:
Das zur Ermittlung des Zusammenhangs der Schwereempfindung und der Masse beschriebene Verfahren soll hier auf die Lautstärkeempfindung übertragen werden.

Material:

Stethoskop mit zwei Membranen	Radioempfänger
Stativmaterial	Kartonstreifen 5cm x 8 cm
Zentimetermaß	Tuch zum Verbinden der Augen
Schallpegelmesser	



- Stellen Sie das Radio so ein, dass es möglichst gleichmäßig rauscht.
- Schließen Sie mit zwei gleichlangen Schläuchen zwei Hörmembranen an einem Stethoskopbügel an.
- Befestigen Sie die Hörmembranen so mit Stativmaterial, dass Sie die Membranen vor einem Lautsprecher des Radios aufstellen können.
- Stellen Sie eine mittlere Lautstärke ein.
- Verbinden Sie der Versuchsperson die Augen.
- Positionieren Sie die Hörmembranen in einer Entfernung s vom Lautsprecher. Die Versuchsperson soll dabei das Rauschen auf beiden Ohren mit gleicher Lautstärke wahrnehmen.

Versuch 1:
- Heben Sie die eine Membran vom Tisch ab und nähern Sie sie so lange dem Lautsprecher, bis die Versuchsperson sicher einen Lautstärkeunterschied wahrnimmt.
- Wiederholen Sie diesen Versuch so lange, bis die zur Lautstärkeänderung Δs benötigte Verschiebungsstrecke sicher ermittelt werden kann.
- Führen Sie diesen Versuch bei unterschiedlichen Lautstärken durch.
- Ermitteln Sie den Quotienten $\Delta s/s$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Versuch 2:
- Der Versuchsleiter verdeckt mit dem Kartonstreifen langsam die Fläche der einen Membran, bis die Versuchsperson sicher wahrnimmt, dass sich die Lautstärke auf einem Ohr verringert.
- Der Versuch wird so lange wiederholt, bis eindeutig bestimmt werden kann, wie viel Prozent der Membrane „beschattet“ sein müssen, damit eine Lautstärkedifferenz sicher wahrgenommen werden kann.
- Wiederholen Sie diesen Versuch bei verschiedenen Lautstärken.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis; ermitteln Sie gegebenenfalls aus dem Verhältnis der abgeschatteten Fläche den „Weberquotienten“.
- Versuchen Sie mit Hilfe eines Schallpegelmesser den „Weberquotienten“ zu bestimmen

Physik Sinnepraktikum

3

Der Zusammenhang von Helligkeit und Lichtintensität

Ziele:

Das zur Ermittlung des Zusammenhangs der Schwereempfindung und der Masse beschriebene Verfahren soll hier auf die Helligkeitsempfindung übertragen werden.

Material:

Tageslichtprojektor
dunkler Karton
Solarmeter [1]
Objektträger
Graufilter

- Bedecken Sie den Projektor vollständig mit dem dunklen Karton, in dessen Mitte sich zwei Löcher mit etwa 5 mm Durchmesser im Abstand von 1 cm befinden.
- Stapeln Sie auf das eine Loch so viele Objektträger, bis Sie sicher einen Helligkeitsunterschied wahrnehmen.
- Wiederholen Sie den Versuch, nachdem Sie unter die Löcher einen bzw. mehrere Graufilter gelegt haben.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- Ermitteln Sie mit Hilfe des Solarmeters den Anteil der Lichtintensität, die von dem Stapel der Objektträger absorbiert wird.
- Beschreiben Sie, wie Sie den „Weberquotienten" für die Helligkeitsempfindung ermitteln könnten.

Bezugsquellen:

[1]: LEU Rotebühlstr. 133 70197 Stuttgart